Aufgabe 9.1 Sind die folgenden Aussagen wahr oder falsch? Widerlegen Sie die falsche Aussagen, indem Sie jeweils ein Gegenbeispiel angeben.

a) Der Binomialkoeffizient $\binom{10}{k}$ ist für alle ganzen Zahlen $0 \leq k \leq 10$ durch 5 teilbar.

b) Für alle $x \in \mathbb{R}$ ist x^2 positiv.

c) $\ln|x| > 0$ für alle $x \neq 0$.

d) Alle Zahlen der Form $2^n - 1$ für $n \in \mathbb{N}$ sind prim.

e#) Alle Folgenglieder der durch die Rekursion

$$p_{n+3} = p_{n+2} + p_{n+1} - p_n, \quad p_1 = 5,\ p_2 = 7,\ p_3 = 11$$

definierten Folge sind Primzahlen.

Aufgabe 9.2 Sei $n \in \mathbb{N}$. Beweisen Sie die folgenden Aussagen mit Induktion:

a) $n^3 + 2n$ ist für alle $n \in \mathbb{N}$ durch 3 teilbar.

b) $\displaystyle\sum_{m=2}^{n} \frac{1}{(m-1)m} = 1 - \frac{1}{n}$.

c) $n^2 \geq 2n + 2$ für alle $n \geq 3$.

d) $n^2 - 1$ ist für alle ungerade $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$, durch 8 teilbar.

Aufgabe 9.3 Betrachten Sie die Summen

$$1, \quad 1+3, \quad 1+3+5, \quad 1+3+5+7, \quad \ldots$$

Wie kann man diese Summen (zeichnerich) veranschaulichen? Welchen Wert kann man für die n-te Summe vermuten? Beweisen Sie Ihre Vermutung mit Induktion.

Aufgabe 9.4 Ergänzen Sie das Pascalsche Dreieck bis $n = 10$.

Aufgabe 9.5 Berechnen Sie: $\binom{7}{1}, \binom{12}{0}, \binom{12}{7}, \binom{13}{5}, \binom{50}{48}, \binom{28}{4}$.

Aufgabe 9.6

a) Wie viele Möglichkeiten gibt es, 5 weißen und 4 schwarzen Kugel in eine Reihe so zu legen, dass 2 schwarze Kugel nie nebeneinander liegen? Unterscheiden Sie die Fälle: (i) die Kugel einer Farbe sind ununterscheidbar, (ii) alle Kugel sind unterscheidbar.

b) Wie viele 6-stellige Zahlen gibt es, die nur aus ungeraden Ziffern $(1, 3, 5, 7, 9)$ bestehen?

c) Wie viele Teiler hat die Zahl 462?

d) Wie viele Möglichkeiten gibt es, 8 Türme auf einem Schachbrett so zu platzieren, dass sich nicht schlagen und nur auf den schwarzen Feldern stehen?